

30/11/2015

$ax+by=c$ (*) $\Leftrightarrow$ (*) έχει απέραιτες λύσεις $\Leftrightarrow d=(a,b)|c$
Υποθέτουμε ότι $d=(a,b)|c$. Τότε $c=dc'$. Επειδή $d=(a,b) \Rightarrow \exists x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$
: $d=ax_0+by_0 \Rightarrow c=d \cdot c' = ax_0 \cdot c' + by_0 \cdot c'$. Ορίζουμε $\begin{cases} x_0 = x_0 \cdot c' \\ y_0 = y_0 \cdot c' \end{cases}$

Θα έχουμε: $ax_0+by_0=c$. Δηλαδή το ζεύγος (x_0, y_0) διότι της (*).

Τότε όλες οι απέραιτες λύσεις

της (*) θα είναι: $\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{a}t \\ y = y_0 - \frac{a}{b}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

ΑΣΚΗΣΗ 1. Έστω η ΓΛΕ

$$221 \cdot x + 340 \cdot y = 51 \quad (*)$$

Βρίσκουμε το Μ.Κ.Δ των 221 και 340

Ευκλείδης Αλγόριθμος:

$$340 = 221 \cdot 1 + 119$$

$$221 = 119 + 102$$

$$119 = 102 \cdot 1 + (17) \rightarrow \text{ΜΚΔ}$$

$$102 = 17 \cdot 6 + 0$$

Τότε $a=221$, $b=340$, $c=51$

Τότε: $d=(a,b)=(221,340)=17$. Επειδή $c=51=3 \cdot 17 \Rightarrow d=17|51 \Leftrightarrow$
η (*) έχει απέραιτες λύσεις. Τότε: $c'=3$

Θα έχουμε $17 = 119 - 102 = 119 - (221 - 119) = -221 + 2 \cdot 119 = -221 + 2 \cdot 340 - 2 \cdot 221$

$$= -3 \cdot 221 + 2 \cdot 340. \text{ Άρα: } 221 \cdot (-3) + 340 \cdot 2 = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{221 \cdot (-9)}_{x_0} + \underbrace{340 \cdot 6}_{y_0} = 51$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -9 \\ y_0 = 6 \end{cases} \text{ Απέραιτες λύσεις της (*)}$$

Όλες οι λύσεις της (*) θα είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t = -9 + \frac{340}{17}t = -9 + 20t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t = 6 - \frac{221}{17}t = 6 - 13t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Για θετικές λύσεις θα πρέπει $x, y > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -9 + 20t > 0, 6 - 13t > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20t > 9 \\ 6 > 13t \end{cases} \Rightarrow t > \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{9}{20} < t < \frac{6}{13} \text{ Δεν υπάρχει ακέραιος } t \text{ ο οποίος}$$

επληρώνει αυτές τις ανισότητες. Άρα η (*) δεν έχει θετικές λύσεις □

ΑΣΚΗΣΗ 2 Γράμμα κοστίζει (α) 83 πέντα, (β) 84 πέντα.

Διαθέτουμε γραμματόσημα ύψους των 6 πεντάρικων και των 15 πεντάρικων. Μπορούμε να στείλουμε το γράμμα;

Θέτουμε $x =$ αριθμός γραμματόσημων των 6 πεντάρικων
 $y =$ αριθμός γραμματόσημων των 15 πεντάρικων

(α) $6x + 15y = 83$ Ψάχνουμε την απεντακτική λύση για τις
 (β) $6x + 15y = 84$ Γ.Δ.Ε. (α) και (β)

Τότε: $a=6, b=15, c \begin{cases} \rightarrow 83 \\ \rightarrow 84 \end{cases}$

$d(6, 15) = 3$. Τότε $3 \nmid 83$ και άρα η (α) δεν έχει ακέραιες λύσεις. Τότε $3 \mid 84$, διότι $84 = 3 \cdot 28$ και άρα η (β) έχει ακέραιες λύσεις. Τότε $c' = 28$.

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία το παίρνει: $\begin{cases} x_0 = -56 \\ y_0 = 28 \end{cases}$ λύση της ③

Γενική λύση της ③ θα είναι:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -56 - \frac{19}{3}t = -56 + 5t \\ y = 28 - \frac{6}{3}t = 28 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Ζητάμε την αρνητική λύση $\Rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow -56 + 5t \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5t \geq 56 \Rightarrow t \geq \frac{56}{5} \approx 11,2$ Άρα $12 \leq t \leq 14$
 $28 - 2t \geq 0 \Rightarrow 28 \geq 2t \Rightarrow t \leq 14$

Άρα $t = 12, 13, 14$ - Κάθε μια από αυτές τις τιμές δίνει μια λύση αρνητική της ③

$$(-56 + 5 \cdot 12, 28 - 2 \cdot 12), (-56 + 5 \cdot 13, 28 - 2 \cdot 13), (-56 + 5 \cdot 14, 28 - 2 \cdot 14)$$

□

Η Γ.Δ.Ε.: $a_1x + \dots + a_nx_n = b$ έχει ακέραιες λύσεις ⑥
 $d = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid b$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ①: Έστω η ΓΔΕ: $6x + 8y + 10z = 1$.

Επειδή $d = (6, 8, 10) = 2 \nmid 1 \Rightarrow$ η εξίσωση δεν έχει ακέραιες λύσεις.

②: Έστω ΓΔΕ: $6x + 8y + 10z = 4$ ⑦ Τότε $d = (6, 8, 10) = 2 \mid 4 \Rightarrow$
 η ⑦ έχει ακέραιες λύσεις. Η ⑦ παράγεται πολλαπλασιάζοντας και
 ως: $[3x + 4y + 5z = 2]$ ⑧

Αντικαθιστούμε επιπλέον τον τεταθικό z:

$$\text{Θετάρουμε } z = 5s \text{ τότε } ⑧: 3x + 4y = 2 - 5s \quad (**)$$

Η ⑧ έχει πάντα ακέραιες λύσεις ως προς x και y, γιατί $(3, 4) = 1 \mid 2 - 5s$

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία, για το $\textcircled{**}$, θα έχουμε ότι η γενική της λύση είναι:

$$\begin{cases} x_0 = -2 + 5s \\ y_0 = 2 - 5s \end{cases} \text{ και } \begin{cases} x = x_0 + \frac{4}{1}t \\ y = y_0 - \frac{3}{1}t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 5s + 4t \\ y = 2 - 5s - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{Z} \text{ γενική λύση της } \textcircled{*}.$$

$$z = s, s \in \mathbb{Z}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

πεδίο ορισμού: Φυσικός
αντίο τιμών: Μυδιακόμοι

Μια αριθμητική συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της μορφής
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ① $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, f(n) = e^{in}$

② $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, f(n) = n^k$, όπου k σταθ. φυσικός

③ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

④ Συνάρτηση $T, T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, T(n) =$ αριθμός φυσικών διαιρετών του n .
δηλαδή: $T(n) = \left| \{ d \in \mathbb{N} \mid d|n \} \right|$

⑤ $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \sigma(n) =$ άθροισμα των φυσικών διαιρετών του n .
Έτσι αν $d_1, d_2, \dots, d_{T(n)}$ είναι οι φυσικοί διαιρετές του n ,
τότε:

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \dots + d_{T(n)}$$

⑥ Η συνάρτηση του Euler $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}: \varphi(n) = \left| \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n, (k, n) = 1 \} \right|$

⑦ Η συνάρτηση του Möbius: $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$
$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n=1 \\ 0, & \text{αν } \exists p: \text{πρώτος } p^2 | n \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1 p_2 \dots p_k \end{cases}$$

όπου $p_1, p_2, \dots, p_k$ διακεκριμένοι πρώτοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Για $n=12$

Οι φυσικοί διαιρέτες του 12 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 12

$$\tau(12) = 6, \quad \sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

$$\varphi(12) = \left| \left\{ k \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} 1 \leq k \leq 12 \\ (k, 12) = 1 \end{array} \right\} \right| = \left| \{1, 5, 7, 11\} \right| = 4$$

$$\mu(12) = \mu(2^2 \cdot 3) = 0$$

Έστω $A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{αριθμητική συνάρτηση}\}$ το σύνολο όλων των αριθμητικών συναρτήσεων

Αν $f \in A$ τότε ορίζεται μια νέα αριθμητική συνάρτηση:

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

Αν $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{\tau(n)}$ είναι οι φυσικοί διαιρέτες του n , τότε:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) = f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_{\tau(n)})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: αν $n=12$, τότε:

$$F(12) = \sum_{d|12} f(d) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(12)$$

Αν $f, g \in A$, τότε ορίζεται μια νέα αριθμητική συνάρτηση $f * g \in A$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f * g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) =$$

$$= f(d_1) \cdot g\left(\frac{n}{d_1}\right) + f(d_2) \cdot g\left(\frac{n}{d_2}\right) + \dots + f(d_{\tau(n)}) g\left(\frac{n}{d_{\tau(n)}}\right)$$

Η συνάρτηση $f * g$ καλείται εναλλακτικό γινόμενο ή γινόμενο Dirichlet των f και g .